

الفنازاسن علی

به نام خدا

فناوری صدا

مبانی ریاضی

در مجموعه

اعداد طبیعی : اعدادی که برای شمردن اشیاء به طور طبیعی به کار می روند، اعداد طبیعی نامیده می شوند.

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

اعداد حسابی : اعداد طبیعی به همراه صفر، اعداد حسابی نام دارند.

$$W = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

اعداد صحیح : اعداد طبیعی را به همراه صفر و مقابله اعداد طبیعی، اعداد صحیح گویند.

$$Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

اعداد گویا : به هر کسری یا عددی که بتوان آن را به صورت کسری نوشت، عدد گویا گویند.

$$Q = \{ \dots, 2, 3, 1.5, \dots \}$$

اعداد نامرئی (لاهمم) : به اعدادی که جنبه حاصل ندارند، اعداد نامرئی یا لاهمم گویند. عدد π نمونه یکی عدد نامرئی است.

$$Q' = \{ \dots, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots \}$$

اعداد حقیقی : به تمام اعداد منهای لاهمم، اعداد حقیقی گویند.

$$R = \{ N, W, Z, Q, Q' \}$$

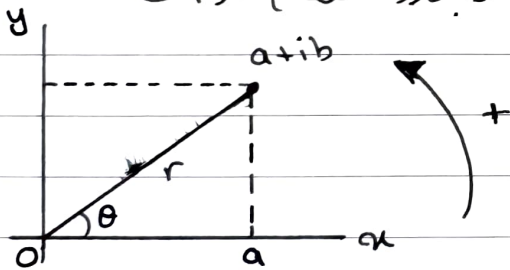
اعداد مختلط

معرفی اعداد مختلط: مجموعه اعداد مختلط به انفرایم $\mathbb{C}$ (اول طبری Complex) نمایش می دهیم. شامل حلقه اعدادی به شکل $z = a + ib$ است که در آن a و b اعداد حقیقی بوده و i واحد مختلط طوری خاص است $i^2 = -1$ است.

عدد a را بخش حقیقی و عدد b را بخش موهومی z می نامیم و می نویسیم
 $a = \text{Re}(z)$
 $b = \text{Im}(z)$

اگر $a=0$ ، آنگاه عدد $z = ib$ بی عدد موهومی بخش و
 اگر $b=0$ ، آنگاه عدد $z = a$ بی عدد حقیقی بخش نامیده می شود.
 عدد $2i$ بی عدد موهومی بخش و عدد -2 بی عدد حقیقی بخش است.

برای نمایش اعداد مختلط از صفحه مختلط استفاده می کنیم. عدد $a + ib$ به صورت هندسی به عنوان نقطه ای به مختصات (a, b) در صفحه دکارتی تعبیر می شود. محور a را محور حقیقی و محور b را محور موهومی می نامیم. مبدأ مختصات منظر باشد مختلط هندسی است.



تساوی دو عدد مختلط: اگر $z_1 = a_1 + ib_1$ و $z_2 = a_2 + ib_2$ ، آنگاه شرط لازم و کافی برای تساوی z_1 و z_2 این است که داشته باشیم: $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$.

از این نتیجه به خصوص در حل معادلاتی شامل متغیرهای مختلط استفاده می شود. در حل این معادلات کافی است که بخش حقیقی و موهومی دو طرف را مساوی یکدیگر قرار دهیم، جواب های معادله نتهی شود.

$$C = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad a = \text{Re}(z) \quad b = \text{Im}(z)$$

حقیقی موهومی

$$3+5i = z_1$$

$$z_2 = 3+0i = 3$$

$$2+(-5i) = 2-5i$$

$$4+1i = 4+i$$

$$4-1i = 4-i$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$, k \in \mathbb{R}$$

(عملیات جبری روی اعداد مختلط)

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

۱- عمل جمع

$$kz_1 = ka_1 + kb_1 i$$

۲- عمل ضرب اعداد

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

۳- ضرب

$$\|z_1\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

۴- اندازه (نرم)

$$\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i$$

۵- مزدوج

$$\frac{z_1}{z_2} \times \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

۶- تقسیم

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

* نکته :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$

و نیز که : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ و $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

$$\begin{cases} z + 0 = z \\ z \cdot 1 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{cases}$$

$$\{ z \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

نسبتی مثلثی

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$: z_2 = 5 - 2i, z_1 = 3 + i$$

مسألة: ١

$$z_1 z_2 = (3 + i)(5 - 2i) = (15 + 2) + (-6 + 5)i = 17 - i$$

$$z_1 + 2z_2 = 3 + i + 10 - 4i = 13 - 3i$$

$$i^2 = (0 + i) \cdot (0 + i) = (0 - 1) + (0 + 0)i = -1 + 0i = -1 \Rightarrow i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$$

$$z_1 z_2 = (3 + i)(5 - 2i) = 15 - 6i + 5i - \underbrace{2i^2}_{-1} = 17 - i$$

$$i^5 (i^3 + 3) = i^2 (-i + 3) = -\underbrace{i^2}_{-1} + 3i = 1 + 3i$$

$$|z_2| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\bar{z}_2 = 5 + 2i$$

$$\bar{\bar{z}} = 3 + i = z_1$$

$$|z_1| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\bar{z}_1 = 3 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{5-2i} \times \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{15+6i+5i+2i^2}{25+4} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

$$\frac{i^2(1+i^3)}{(3-i)^2} = \frac{-1+i}{8-6i} \times \frac{8+6i}{8+6i} = \frac{-8-6i+8i+6i^2}{64+36} = \frac{-14+2i}{100} = \frac{-7}{50} + \frac{i}{50}$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

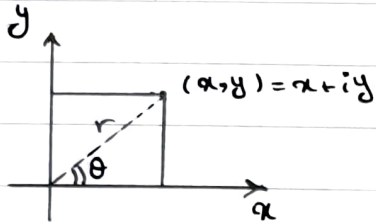
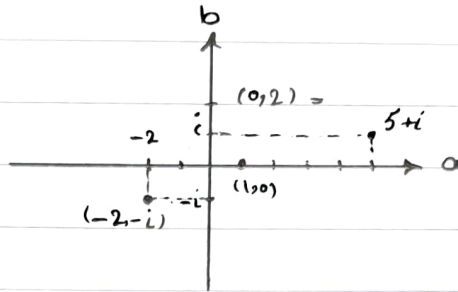
$$(3-i)^2 = 9 - 6i + \underbrace{i^2}_{-1} = 8 - 6i$$

$$i^2(1+i^3) = -1(1-i) = -1+i$$

نرم قطب اعلا قضا

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a+bi \rightarrow (a,b)$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$z = x+iy = r \cos \theta + r \sin \theta i = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2e^{i\theta}$$

$$2+2i \rightarrow r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

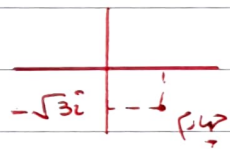
$$\rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2+2i = 2\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$1-\sqrt{3}i \rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\rightarrow \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

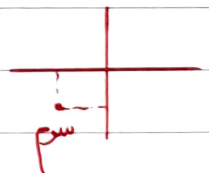
$$1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$



$$-1-\sqrt{3}i \rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\rightarrow \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

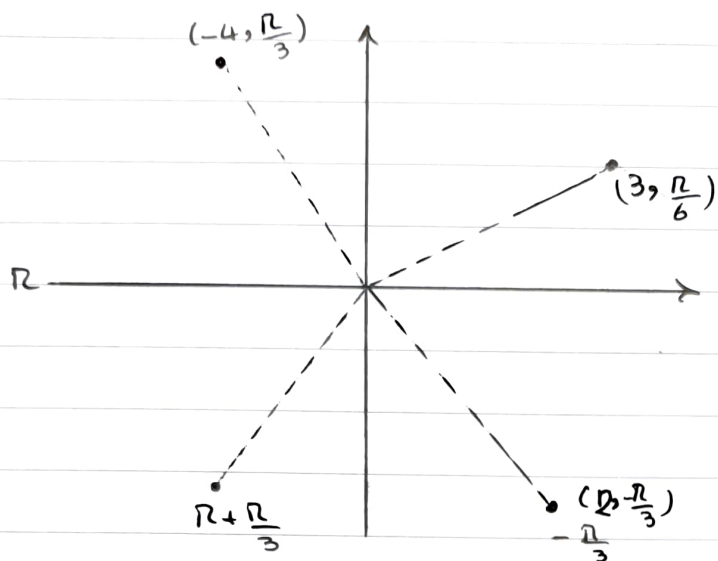
$$-1-\sqrt{3}i = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$



$$4e^{\frac{2\pi}{3}i} = r \cos \theta + r \sin \theta i = 4 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i 4 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}\right) + i 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$$

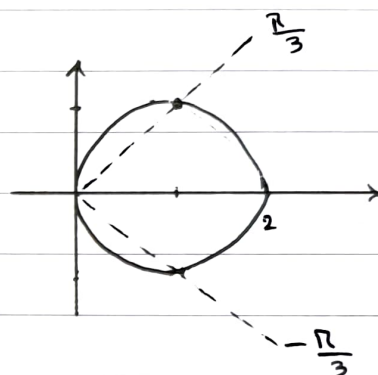




$$\begin{aligned} &(3, \frac{\pi}{6}) \\ &(5, \pi + \frac{\pi}{3}) \\ &(2, -\frac{\pi}{3}) \\ &(-4, \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

$$r = 2 \cos \theta$$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	2	1	0	-2	0	2



$$r = 1 + \cos \theta$$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	2	$\frac{3}{2}$	1	0	1	0

